Grado en Matemáticas y Doble Grado en Física y Matemáticas
Análisis Funcional – Convocatoria Ordinaria – Febrero 2021

1. Sea $T : c_0 \to \ell_1$ el operador lineal definido para todo $x \in c_0$ por

$$[Tx](n) = \frac{x(n)}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

   a) Calcula su norma y prueba que T no la alcanza.

   b) Prueba que $Y = T(c_0)$ es un subespacio denso en ℓ_1 y que T es una biyección lineal de c_0 sobre Y.

   c) ¿Es continua la aplicación $T^{-1} : Y \to c_0$? ¿Es Y cerrado en ℓ_1?.

2. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $S, T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dos aplicaciones lineales verificando que

$$\big(T(x)\big|y\big) = \big(x\big|S(y)\big) \qquad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

   Prueba que T y S son continuas y $\|T\| = \|S\|$.

3. Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ una aplicación lineal y continua. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes

   a) Existe $m > 0$ tal que $\|T(x)\| \geqslant m\|x\|$ para todo $x \in X$.

   b) T es inyectiva y $T(X)$ es cerrado en Y.

4. Escribe sobre uno de los siguientes temas:

   a) Espacios normados de dimensión finita. Teoremas de Hausdorff y de Riesz.

   b) El teorema de Hahn-Banach en espacios normados.

   c) Homomorfismos topológicos. Teoremas de la aplicación abierta y de los isomorfismos de Banach.